微分方程式の解の存在と一意性

Takashi

2020 年 8 月 16 日

0　はじめに

今回注目する微分方程式の初期値問題とは、微分方程式とその初期値が与えられた時にそれらを満たす解を求める問題である。微分方程式の初期値問題では、微分方程式の形に内在する連続性の概念から求める解の存在とその一意性に関する議論をすることができる。前半部の第１〜３節では、極限や微分方程式などの基本概念から目標となる解の存在と一意性定理の証明を与え、又、後半部の第４〜５節では、その具体例な応用に関して考察する。

1　解析学の基礎概念

この節では、以降の節の定理の証明などに必要となる解析学の基礎概念を説明する。集合論や論理学の基礎概念や実数、上界などの一部の定義、証明は省略する。

【定理】 1.1.

上（下）に有界な単調増加列（単調減少列）$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ （$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$）に収束する。

〈証明〉 省略。■

【定理】 1.2. (区間縮小法)

有界閉区間の列 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が区間の単調減少列、すなわち $^\forall I_n$ に対して $I_n \supset I_{n+1}$ である時、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$ が成立する. 特に、$I_n = [a_n, b_n]$ と置くと、$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば、$^\forall I_n$ の共通部分は 1 点集合 $\{c\}$ となり、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ が成り立つ。

〈証明〉

$I_n = [a_n, b_n]$ が単調減少であるので、

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$$

と書くことができ、a_n は上に有界な数列であり、b_n は下に有界な数列である。よって、定理 1.1 より

$$^\exists a, b \in \mathbb{R}\,[a_n \to a = \sup_{i\in\mathbb{N}} a_i, b_n \to b = \inf_{i\in\mathbb{N}} a_i\,(n \to \infty)]$$

であり、$^\forall n \in \mathbb{N}, [a_n \leq b_n]$ であるので、$a \leq b$ となり、$[a, b] \neq \varnothing$ である。ここで、上界と下界の定義より、任意の n に対し $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ が成立するので、$^\forall I_n$ に対して $[a, b] \subset I_n$ であり、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$ が示された。

次に、$c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ とすると、任意の n に対して $a_n \leq c \leq b_n$ であるので $0 \leq (c-a) \leq b_n - a_n$ である。そこで、$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ ならば、$a = c$ が成立し、同様に $b = c$ が成立する。よって、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ が示された。■

【定理】 1.3. (Bolzano-Weierstrass の定理)

有界実数列は収束する部分列を持つ。

〈**証明**〉

有界実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると、有界性より以下の様に区間 I をとる事が出来る。

$$^\exists b, c \in \mathbb{R}, ^\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in I = [b, c]$$

さて、有界閉区間の列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次の様に設定する。

$$I_0 = I, \quad I_n = [b_n, c_n]$$

ここで、$d_n = \frac{b_n + c_n}{2}$ とおくと、$[b_n, d_n]$ と $[d_n, c_n]$ の内少なくともいずれか一方は実数列の元を無限個含む。その様な区間を I_{n+1} と置く事により、有界閉区間の列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が定義される。この時、自明に $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の各区間の幅は単調減少列であり、

$$c_n - b_n = \frac{c-b}{2^n} \to 0, \qquad (n \to \infty)$$

となる。以上より、有界閉区間列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少し、$\lim_{n\to\infty} c_n - b_n = 0$ であるので、定理 1.2 により、

$$^\exists a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

となる。ここで各区間 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に含まれる実数列の元で、$k_0 = 0$ として添え字の値が $k > k_{n-1}$ である元の内もっとも小さい元を a_{k_n} として帰納的に部分列 $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定義する。すると、任意の n に対して $b_n \leq a_{k_n} \leq c_n$ であるので、はさみうちの定理によって有界実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ へと収束する部分列 $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ。■

【定義】 1.4. (コーシー列/Cauchy sequence)

コーシー列とは、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であり、

$$^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

を満たすものである。■

【定理】 1.5.

任意のコーシー列は有界である。

〈**証明**〉

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をコーシー列とすると、定義 1.4 より

$$^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall n, m \geq N \quad a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$$

である。そこで、$M = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_m - \varepsilon|, |a_m + \varepsilon|\}$ とおくと、

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| < M$$

となり、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。■

【定理】 1.6.

コーシー列のある部分列が α に収束する時、元のコーシー列も α に収束する。

〈**証明**〉

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をコーシー列とすると、定義 1.4 より

$$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall n, m \geq N, \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

である。又、仮定より、部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は上記の ε を用いて

$$^\exists k_0 \in \mathbb{N}, ^\forall k \geq k_0, \quad |a_{n(k)} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となり、ある点 α に収束する。これらを合わせると、任意の $k > k_0$ に対して

$$\begin{aligned} |\alpha - a_k| &\leq |\alpha - a_{n(k)}| + |a_{n(k)} - a_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立し、元のコーシー列も部分列の収束先の α に収束する。■

【定理】 1.7.

実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することは、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることと同値である。

〈**証明**〉

二段階に分けて証明する。

（第一段：実数列が収束 $\Rightarrow$ 実数列がコーシー列）

実数列 $a_{nn\in\mathbb{N}}$ が収束するので、

$$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists n_0 \in \mathbb{N}, ^\forall n \geq n_0, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで、$^\forall m, n \geq n_0$ に対して、

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a| + |a - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となり、一段階目が示された。

（第二段：実数列がコーシー列 $\Rightarrow$ 実数列が収束）

定理 1.5 より、実数列 $a_{nn\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であるので有界である。よって、定理 1.3 より、有界実数列は収束する部分列を持つので、実数列 $a_{nn\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つ。最後に、定理 1.6 より、コーシー列が収束する部分列を持つ時、コーシー列も収束するので、実数列 $a_{nn\in\mathbb{N}}$ も収束する。■

2　Banach 空間と Banach の不動点定理

微分方程式の解の存在と一意性を考えるにあたり、各微分方程式を特徴付ける函数を空間の元として捉え直す必要がある。空間とは集合に何らかの付加構造が加わったものであり、今回注目する Banach 空間もその付加構造を定義することにより定義される集合である。以下では、まず、Banach 空間を定義し、第 3 節で必要となる Banach の不動点定理の証明を与える。

【定義】 2.1. (距離空間/Metric space)
距離空間とは集合 X と距離函数 $d(\bullet,\bullet): X \times X \to \mathbb{R}$ の組 (X,d) であり、任意の $x,y,z \in X$ に対して、

1. $d(x,y) \geq 0$ であり、特に $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$ 　　(正定値性)
2. $d(x,y)=d(y,x)$ 　　(対称律)
3. $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ 　　(三角不等式)

を満たすものである。■

【定義】 2.2. (ベクトル空間/Vector space)
ベクトル空間とは体上の加群である。■

【定義】 2.3. (ノルム空間/Normed space)
体 $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ 上のノルム空間とはベクトル空間 X と空間の各元に対してノルムと呼ばれる実数を割り当てる単項演算 $\|\bullet\|: X \to \mathbb{R}$ の組 $(X,\|\bullet\|)$ であり、任意の $x,y \in X$ と任意の $\alpha \in \mathbb{K}(\mathbb{R})$ に対して、

1. $\|x\| \geq 0$ であり、特に $\|x\|=0 \Longleftrightarrow x=0$ 　　(正定値性)
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ 　　(斉次性)
3. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ 　　(三角不等式)

を満たすものである。■

【定義】 2.4. (バナッハ空間/Banach space)
バナッハ空間とはノルム空間 $(X,\|\bullet\|)$ であって、その任意のコーシー列が X のある元に収束するものである。この事を「バナッハ空間とは完備なノルム空間である」と表現する。■

以上が様々な空間の定義であった。定義より明らかにバナッハ空間 $\Rightarrow$ ノルム空間 $\Rightarrow$ ベクトル空間の関係が成立している。又、ノルム $\|\bullet\|$ は $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ と定める事によって距離函数を定義できる為、ノルム空間 $\Rightarrow$ 距離空間の関係が成立する。さて、第二節冒頭で記した通り、様々な空間を考えているのは、函数を空間の元として捉え直す事が目的であった。その為、以下では実数値連続函数の集合を定義し、その集合に自然にバナッハ空間の性質が入る事を確かめる。

【定義】 2.5. ($C(I)$)
$C(I)$ を有界閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された実数値連続関数の集合とする。■

【定義】 2.6. ($(C(I),\|\bullet\|)$)
$(C(I),\|\bullet\|)$ は以下の様な演算を定義する事により定まるバナッハ空間である。

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ 　　(Abel 群)
2. $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 　　(体から Abel 群への作用)
3. $\|f\|=\sup_{x \in I}|f(x)|$ 　　(ノルム)

以上で定められた空間は完備であり、バナッハ空間となっている。■
上記の定義 2.6 における条件 1,2 は集合にベクトル空間の構造を与え、条件 3 はそのベクトル空間にノルムの構造を与える。このノルムは実数の完備性から確かに完備である事が確認できる。

【定義】 **2.7.** (縮小写像/Contraction mapping)

距離空間 (X,d) が定まっている時、$f:X\to X$ が縮小写像であるとは、

$$^{\exists}k\in(0,1),^{\forall}x,y\in X,\quad d\left(f(x),f(y)\right)\le kd(x,y)$$

そ満たす事である。すなわち、縮小写像とは、空間中の２点を f を用いて写像した際に、その２点間の距離が短くなる様な写像である。■

【定理】 **2.8.** (Banach の不動点定理)

空でない完備な距離空間 (X,d) に対し、$f:X\to X;\ x\mapsto f(x)$ を縮小写像とする。このとき、$x=f(x)$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ がただ一つ存在する。

〈証明〉

存在性と一意性を分けて証明する。

（存在性の証明）

まず、考えている写像 f を用いて、次の様に点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定義する。

$$x_{n+1}=f(x_n),\qquad n\in\mathbb{N}$$

ここで仮定より考えている空間は空でないので、少なくとも一つの元をとることが出来る。そこで任意の元 $x_1\in X$ を選ぶことにより、この点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は完全に定義される。この時、縮小写像の定義 2.7 より、

$$d(x_{n+2},x_{n+1})=d(f(x_{n+1}),f(x_n))\le kd(x_{n+1},x_n)$$

が成り立つ。同様の手順を繰り返すことにより、

$$d(x_{n+2},x_{n+1})\le kd(x_{n+1},x_n)\le\ldots\le k^n d(x_2,x_1)$$

が導かれる。よって、一般性を失わずに $m>n$ と仮定すると、次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_n)&\le d(x_m,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_{m-2})+\ldots+d(x_{n+1},x_n)\\
&\le(k^{m-2}+k^{m-3}+\ldots+k^{n-1})d(x_2,x_1)\\
&=\frac{k^{n-1}(1-k^{m-n})}{1-k}d(x_2,x_1)\\
&\le\frac{k^{n-1}}{1-k}d(x_2,x_1)\to 0\quad(n\to\infty)
\end{aligned}$$

したがって、定義 1.4 より $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列である。仮定より (X,d) は完備であるので、ある $x\in X$ が存在して、$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=x$ である。ここで、縮小写像は連続関数であることから、今得た式を極限操作を変数に対するものとして以下の様に変形することが可能であり、

$$f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=x\Leftrightarrow f(x)=x$$

となり、不動点の存在が示された。

（一意性の証明）

ある $x,y\in X$ が存在し、$f(x)=x,f(y)=y$ を満たすと仮定する。この時、

$$\begin{gathered}
d(x,y)=d(f(x),f(y))\le kd(x,y)\\
\Leftrightarrow(1-k)d(x,y)\le 0
\end{gathered}$$

となるが、ここで $(1-k)>0$ より、$d(x,y)\leq 0$ であり、距離函数の正定値性により、

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

よって、不動点の一意性が示された。■

3　微分方程式の解の存在と一意性定理

常微分方程式の初期値問題とは、微分方程式とその初期値が与えられた時にそれらを満たす解を求める問題であり、一般に、変形することにより、以下の様な連立方程式として表される。

$$\frac{d}{dx}\varphi(x)=\varphi'(x)=f(\varphi(x))$$

$$\varphi(0)=\varphi_0$$

すなわち、常微分方程式の初期値問題は、上記の連立方程式の中に現れる $f(x)$ に支配された問題であると考えることができる。以下では、連続性に関する 2 つの概念を定義した上で、上述の函数 $f(x)$ の連続性によって、解の存在と一意性がどのように議論できるかを考察する。

【定義】 3.1. (リプシッツ連続/Lipschitz continuity)
以下の函数 $f(x)\in C(\mathbb{R})$ を考える。

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

この時、f がリプシッツ連続であるとは、

$$^{\exists}L>0,^{\forall}x,y\in\mathbb{R},\quad \|f(x)-f(y)\|\leq L\|x-y\|$$

が成立することである。すなわち、ある定数 L が存在し、函数の定義域に含まれる任意の 2 点を写像した先の 2 点間のノルムが元の 2 点間のノルムの定数 L 倍で抑えられることである。■

【定義】 3.2. (局所リプシッツ連続/Local Lipschitz continuity)
以下の函数 $f(x)\in C(\mathbb{R})$ を考える。

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

この時、f がリプシッツ連続であるとは、

$$^{\forall}M>0,^{\exists}L_M>0,^{\forall}x,y\in\overline{B_M},\quad \|f(x)-f(y)\|\leq L_M\|x-y\|$$

$$\overline{B_M}:=\{x\in\mathbb{R}|\|x\|\leq M\}$$

が成立することである。すなわち、任意に M を選んで原点からのノルムが M 以下である様な閉球に着目した時に、定数 M に依存して良いある定数 L_M が存在し、選んだ閉球に含まれる任意の 2 点を写像した先の 2 点間のノルムが元の 2 点間のノルムの定数 L_M 倍で抑えられることである。■

定義 3.1 と 3.2 より、明らかにリプシッツ連続 $\Rightarrow$ 局所リプシッツ連続である。

【定理】 3.3. (グロンウォールの不等式/Gronwall's inequality)

半開区間 I を $T>0$ を用いて $\mathbb{R}\ni I=[0,T)$ と定義する。この時、区間 I 上で可積分な函数 $g(t),h(t)\in C(I)$ で $g(t)>0$ であるとする。ここで、不等式

$$h(t)\leq a+\int_0^t g(s)h(s)ds, \quad t\in[0,T)$$

が成り立つとすると、次の不等式

$$h(t)\leq a\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$$

が成立する。

〈**証明**〉

仮定より成立している不等式の右辺を以下の様に $H(t)$ とおく。

$$h(t)\leq a+\int_0^t g(s)h(s)ds=H(t)$$

すると、次の二つの不等式を得る。

$$g(t)h(t)\leq g(t)H(t)$$
$$H'(t)=g(t)h(t)$$

一本目は不等式の両辺に $g(t)$ をかけた式であり、二本目は $H(t)$ とその定義式を微分したものである。これらを連立すると $(H'(t)-g(t)H(t))\leq 0$ となる。これを利用して、$\exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right)H(t)$ を微分した式を以下の様に不等式で評価する事が出来る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right)H(t)\right\}&=\exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right)(H'(t)-g(t)H(t))\\&\leq 0\end{aligned}$$

ここで、一つ目の等号は積の微分におけるライプニッツ則である。得た不等式より、一階微分が負である事から $\exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right)H(t)$ は広義単調減少である事が分かる。よって、$t>0$ であるので、以下の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right)H(t)&\leq\exp\left(-\int_0^0 g(s)ds\right)H(0)\\&=H(0)\left(=a+\int_0^0 g(s)h(s)ds\right)\\&=a\\\Leftrightarrow H(t)&\leq a\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)\end{aligned}$$

この不等式と証明の冒頭で $H(t)$ を定義する際に用いた不等式を連立する事により、

$$h(t)\,(\leq H(t))\leq a\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$$

が得られる。よって、定理が証明された。■

【注】 3.4.

以下では、これまでに定義や証明をした事項を用いて、函数の連続性に応じた解の存在と一意性定理を証明する。この節の終わりまでは、初期値問題を表現する函数 f として、初期値 $\varphi_0 \in R$ を持つ初期値問題

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \varphi'(t) = f(\varphi(t))$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_0 \in R$$

に現れる f を考え、バナッハ空間 $(C(I), \|\bullet\|)$ やバナッハ空間 $(C^1(I), \|\bullet\|)$ のノルムとして、$\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$ を用いる。尚、上記の問題設定は同値な主張として、

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(s))ds$$

と書き換える事ができる。この式の右辺は初期値問題の解の別の表現となっており、解の初期値と f に対する依存性が明確であり理論的扱いを容易にする。■

【定理】 3.5. (リプシッツ連続な函数に対する解の存在と一意性定理)

注 3.4 における f がリプシッツ連続であるならば、考えている初期値問題の解 $\varphi \in C^1([0, \infty)$ が一意に存在する。

〈**証明**〉

存在性と一意性に関して別々に証明する。

（存在性）

$T > 0, I = [0, T)$ とする。$\varphi \in (C^1(I))$ に対して、$\Phi_\varphi(t) \in C^1(I)$ を次の様に定める。

$$\Phi_\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(s))ds, \quad t \in I$$

すると、注 3.4 より、これは定義されていれば初期値問題の解である。又、$\varphi, \Phi \in C^1(I)$ であることから、今定義された Φ は

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & C^1(I) & \longrightarrow & C^1(I) \\ & \varphi & \mapsto & \Phi_\varphi \end{array}$$

の様な、汎関数として捉え直す事ができる。以下では、$T > 0$ を適切に選び考える空間を制限する事により、Φ がバナッハ空間 $(C^1(I), \| \bullet \|)$ 上の縮小写像となる事を示す。まず、$^\forall \varphi, \psi \in C^1(I)$ に対し、ある定数 L が存在し、以下の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} |\Phi_\varphi(t) - \Phi_\psi(t)| &= \int_0^t f(\varphi(s)) - f(\psi(s))ds \\ &\leq \int_0^t |f(\varphi(s)) - f(\psi(s))|ds \\ &\leq L \int_0^t |\varphi(s) - \psi(s)|ds \end{aligned}$$

ここで、最後の不等号に f のリプシッツ連続性を用いた。ここで、両辺の上界をとり、上界の性質を用いて評価すると。

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_\varphi - \Phi_\psi\| &\leq \sup_{t\in I}\left\{L\int_0^t |\varphi(s)-\psi(s)|ds\right\} \\
&\leq L\int_0^t \sup_{t\in I}\{|\varphi(t)-\psi(t)|\}ds \\
&= L\int_0^t \|\varphi-\psi\|ds \\
&\leq LT\|\varphi-\psi\|
\end{aligned}
$$

となるので、$T=\frac{1}{2L}$ とすると、$\|\Phi_\varphi-\Phi_\psi\|\leq\frac{1}{2}|\varphi-\psi\|$ となる。したがって、Φ はバナッハ空間 $(C^1(I),\|\bullet\|)$ 上の縮小写像であり、定理 2.8 より、

$$
{}^\exists\varphi\in C^1(I),\quad \varphi=\Phi_\varphi
$$

となり、$I=[0,\frac{1}{2L})$ 上で解 φ が存在する事が分かる。ここで、原点を I 上の他の点 $[0,\frac{1}{2L})\ni t>0$ に取り直す事により、再びこれまでの解の存在性についての主張を用いる事によって $I'=[t,t+\frac{1}{2L})$ に解が存在することが確認でき、定義域が右側に $t>0$ の分だけ拡張される事が分かる。ここで、L が T に寄らない定数である事から、この操作を繰り返す事によって定義域を任意の大きさまで拡張する事が可能である。すなわち、この解を $\mathbb{R}$ 上全域で定義する事が可能となる。よって、$\mathbb{R}$ 上全域での解の存在が証明された。

（一意性）

${}^\forall\varphi,\psi\in C^1[0,\infty)$ に対して、以下が成立する。

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t)-\psi(t)| &= \left|\left\{\varphi_0+\int_0^t f(\varphi(s))ds\right\}-\left\{\psi_0+\int_0^t f(\psi(s))ds\right\}\right| \\
&= \left|\int_0^t f(\varphi(s))-f(\psi(s))ds\right| \\
&\leq \int_0^t \left|f(\varphi(s))-f(\psi(s))\right|ds \\
&\leq L\int_0^t |\varphi(s)-\psi(s)|ds
\end{aligned}
$$

ここで、最左辺と最右辺に注目すると、グロンウォールの不等式（定理 3.3）において $a=0$ の場合に該当するので、

$$
\begin{gathered}
|\varphi(y)-\psi(t)|\leq 0 \\
\Leftrightarrow \varphi(t)=\psi(t),\quad t\in[0,\infty)
\end{gathered}
$$

が成立し、解の一意性が示された。■

【定理】 3.6. (局所リプシッツ連続な函数に対する解の存在と一意性定理)

注 3.4 における f が局所リプシッツ連続であるならば、ある定数 $T>0$ が存在し、考えている初期値問題の解 $\varphi\in C^1([0,T))$ が一意に存在する。また、$T_m=\sup\{T>0|$ 初期値問題の解$\varphi\in C^1([0,T))$ が存在する $\}$ と定義すると、次のいずれかが成立する。

(i) $T_m=\infty$

(ii) $T_m<\infty\Rightarrow\lim_{t\to\infty}|\varphi(t)|=\infty$

〈証明〉

存在性と一意性と定義域に関する議論の三部に分けて証明する。
（存在性）
定数 $T, M > 0$ により、閉球 $\overline{B_M} = \{\varphi \in C^1 | \|\varphi\| \leq M\}$ を定義する。注意 3.4 より、

$$\Phi_\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(s))ds, \quad \varphi \in \overline{B_M}, t \in I$$

と定義すると、$\Phi_\varphi(t)$ は定義されていれば、初期値問題の解となる。以降、定理 3.5 で行ったのと同じ方法で Φ を汎関数と捉え直し、これが B_M 上の縮小写像となっている事を示す。まず、以下の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}|f(\varphi(t))| &= |f(0) + f(\varphi(t)) - f(0)| \\ &\leq |f(0)| + |f(\varphi(t)) - f(0)| \\ &\leq |f(0)| + L_M|\varphi(t)| \\ &\leq |f(0)| + L_M M\end{aligned}$$

ここで、二行目から三行目への不等号は f の局所リプシッツ連続性から導かれた。よって、$\Phi_\varphi(t)$ の定義式に今得た不等式を代入する事により、

$$\begin{aligned}|\Phi_\varphi(t)| &= |\varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(s))ds| \\ &\leq |\varphi_0| + |\int_0^t f(\varphi(s))ds| \\ &\leq |\varphi_0| + \int_0^t |f(\varphi(s))|ds \\ &\leq |\varphi_0| + \int_0^t |f(0)| + L_M M ds \\ &\leq |\varphi_0| + \{|f(0)| + L_M M\}T\end{aligned}$$

を得る。ここで、例えば $M = 2|u_0| + |f(0)|, T = \frac{1}{2(L_m+1)}$ と定数を設定すると、それらを具体的に代入して整理する事によって、

$$\begin{aligned}|\Phi_\varphi(t)| &\leq |\varphi_0| + \{|f(0)| + L_M M\}T \\ &= \{\frac{4L_m}{2L_m+1}\}|u_0| + \{\frac{L_m+1}{2L_m+1}\}|f(0)| \\ &< 2|u_0| + |f(0)| = M\end{aligned}$$

となるので、$\sup_{t \in [0, \frac{1}{2(L_m+1)})} \Phi_\varphi(t) = \|\Phi_\varphi\| < M$ であり、$\Phi_\varphi \in \overline{B_M}$ となる。ここで、定理 3.5 における存在性の証明とほとんど同じ方法により、以下が示される。

$$\|\Phi_\varphi - \Phi_\psi\| \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|$$

よって、$\Phi : C^1(I) \to C^1(I); \varphi \mapsto \Phi_\varphi$ は $(\overline{B_M}, \| \bullet \|)$ 上の縮小写像である事が示され、再び定理 3.5 と同様の方法により、バナッハの不動点定理を適用して、考えている初期値問題の解 φ の $\overline{B_M}$ 全域における存在が示された。
（一意性）
$I = [0, T), T > 0$ 上で初期値問題の解 $\varphi, \psi \in C^1(I)$ が存在する時、$M = \max\{\|\varphi\|, \|\psi\|\}$ と置くと、${}^\forall t \in I$

に対して以下が成立する。

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)| &= \Big|\big\{\varphi_0+\int_0^t f(\varphi(s))ds\big\}-\big\{\psi_0+\int_0^t f(\psi(s))ds\big\}\Big| \\ &= \Big|\int_0^t f(\varphi(s))-f(\psi(s))ds\Big| \\ &\leq \int_0^t \big|f(\varphi(s))-f(\psi(s))\big|ds \\ &\leq L_M\int_0^t |\varphi(s)-\psi(s)|ds\end{aligned}$$

と書く事ができる。ここで、最後の不等号は f の局所リプシッツ連続性から導かれたものであり、L_M は M 以外には依存しない定数である。ここで、最左辺と最右辺に注目すると、グロンウォールの不等式（定理 3.3）において $a=0$ の場合に該当するので、

$$|\varphi(y)-\psi(t)|\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t)=\psi(t),\quad t\in I$$

が成立し、解の一意性が示された。

（定義域に関する議論）

改めて、定理における主張を記すと、

(i) $T_m=\infty$

(ii) $T_m<\infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty}|\varphi(t)|=\infty$

のいずれかが成立する。(ii) が成立しない場合に (i) が成立することは明らかであるので、(i) が成立しないと仮定した時に (ii) が成立することを示せば良い。以下では、(ii) が不成立であることを表している

$$^\exists K>0,^\exists\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\quad |\varphi(t_n)|\leq K<\infty\quad [t_n\to T_m]$$

を仮定することから、矛盾を導き背理法で示す。まず、存在性の証明で行ったように、初期値として $\varphi(t_n)$ を採用した場合の解の存在に関する議論を行うことが出来る。結果として、

$$\Phi(t)=\varphi(t_n)+\int_0^t f(\varphi(s))ds,\quad {}^\forall n\in\mathbb{N}$$

の形をした初期値問題の解 $\Phi\in C^1([0,T(K))$ が一意に存在する。ただし、ここで $T(K)$ とは K に依存していても良い定数であり、0 より大である。ここで仮定より、$t_n\to T_m$ の時に有界な解 $\varphi(t_n)$ の存在が述べられているので、$T_m<t_{n_0}+T(K)$ となるような $^\exists\in\mathbb{N}$ をとる事が可能であり、その時、

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t) & (0\leq t\leq t_{n_0}) \\ \Phi(t-t_{n_0}) & (t_{n_0}\leq t<t_{n_0}+T(K))\end{cases}$$

という、より定義域の広い解 $\tilde{\varphi}$ を構成できる。しかしながら、この時

$$\sup\{T>0|\text{ 解}\varphi\in C^1([0,T))\text{ が存在 }\}=T_m<t_{n_0}+T(K)\leq\sup\{T>0|\text{ 解}\varphi\in C^1([0,T))\text{ が存在 }\}$$

となり矛盾。したがって背理法により、(i) が成立しない時に (ii) が成立する事が示された。■

4　例：一階常微分方程式

前節までで、証明を行った結論は以下の通りである。

リプシッツ連続 $\Rightarrow$ 大域的解が一意的に存在

局所リプシッツ連続 $\Rightarrow$ 局所解が一意的に存在（大域解になる or 有限時間で発散する）

なお、これらの結論は連続性の条件が成り立たない時に、解の一意性や存在について否定するものではない。すなわち、局所リプシッツ連続を満たさない場合にも、一意的な大域解が存在する場合がある。以下では、これまで導いた定理を具体例に適用する事を考える。

ここでは、局所リプシッツ連続性を持つ初期値問題を扱い、解が大域解へと延長できる場合を検討する。具体的には

$$\varphi'(t) = -|\varphi|^{\alpha}\varphi(t), \qquad \alpha > 0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$

で表される問題を考える。ここで、$f(y) = -|y|^{\alpha}y$ と置くと、この式はこれまで見てきたようにこの初期値問題の解の性質について決定する函数である。解の存在と一意性定理を適用するために、この函数 f の連続性について考えると、f は C^1 級であり、C^1級 $\Rightarrow$ 局所リプシッツ連続が成立するので、この初期値問題には定理 3.6 を適用する事ができる。すなわち、一意的な解 $\varphi \in C^1([0, T_m))$ が存在する。次に定理 3.6 における後半の定義域に関する主張について検討する。まず、問題の式から以下の不等式が導ける。

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -|\varphi|^{\alpha}\varphi(t), \qquad \alpha > 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2 &= \varphi(t)\varphi'(t) \\
&= \varphi(t)(-|\varphi|^{\alpha}\varphi(t)) \\
&= |\varphi(t)|^{\alpha+2} \leq 0, \qquad t \in [0, T_m)
\end{aligned}$$

よって、微分の値が 0 以下であることから、$|\varphi(t)|^2$ は単調減少である事が分かるので、

$$\begin{aligned}
\varphi(t)^2 &\leq \varphi(0)^2 = \varphi_0 \\
\Leftrightarrow |\varphi(t)| &\leq |\varphi_0|
\end{aligned}$$

となり $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t)| < \infty$ である事がわかるので、定理 3.6 によって $T_m = \infty$ であると分かる。すなわち、解の存在と一意性定理によって、この初期値問題に一意的な大域的解が存在する事が導かれた。

5　例：二階偏微分方程式 (非線形シュレディンガー方程式)

一般的に、非線型シュレディンガー方程式と呼ばれるものは以下の二階偏微分方程式である。

$$i\partial_t u + \nabla^2 u + |u|^{\alpha}u = 0,$$

$$\alpha > 0, t \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

ここで、u の変数を明示的に書くと $u(t, \boldsymbol{x})$ であり、∂_t は変数 t に関する偏微分、$\nabla^2 = \Delta$ を表している。α を含む項が u に 1 より大きいオーダーで依存することから、非線形項と呼ばれており、一般には非線形項を持つ微分方程式は一般解を求めるのが困難である。

この式は変数分離が可能な方程式であり、$u = e^{i\omega t}\varphi(\boldsymbol{x})$ の解の形を仮定して代入し、整理をすると、変数 t に依存しない微分方程式が得られる。特に、$n = 1$ の場合、すなわち空間が 1 次元である様な状況を考えると、以下の二階常微分方程式が得られる。

$$-\varphi'' + \omega\varphi - |u|^\alpha u = 0,$$

$$\alpha > 0, \omega > 0, x \in \mathbb{R}$$

ここで、φ の変数を明示的に書くと $\varphi(x)$ である。問題の単純化の為に以降では、以下の初期条件を仮定する。

$$\varphi(0) = \left(\frac{\omega}{2}(\alpha + 2)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\varphi'(0) = 0$$

上記の初期条件により問題がどの様に単純化されているかは補題 5.2 などで後述する。

さて、第 4 節まで我々が扱ってきたものは一階常微分方程式であるが、上記の式は二階常微分方程式である。したがって、解の存在と一意性の定理をこの問題へ適用する為には、二階常微分方程式に関する解の存在と一意性定理への言い換えを行う必要がある。以下では、二階常微分方程式に対する解の存在と一意性定理の主張を非線形シュレディンガー方程式に適用した結果のみを証明の概略のみとともに与える。

【定理】 5.1. (非線形シュレディンガー方程式に対する解の存在と一意性定理)

ある $T > 0$ が存在し、非線形シュレディンガー方程式を満たす解 $\varphi \in C^2([0, T))$ が一意的に存在する。また、$T_m = \sup\{T > 0|$ 解$\varphi \in C^2([0, T))$ が存在する $\}$ と定義すると、次のいずれかが成立する。

(i) $T_m = \infty$

(ii) $T_m < \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \{|\varphi(x)| + |\varphi'(x)|\} = \infty$

〈証明〉

(概略のみ) 一般に n 階の常微分方程式は n 次元空間の元を変数としてとり、正規形と呼ばれる一階の常微分方程式へと帰着させることが出来る。n 次元空間における函数の局所リプシッツ性は定義 3.2 で注目した閉球が n 次元へと変更されるのみである。以上の事を考慮して、定理 3.6 に若干の修正を加えると二階常微分方程式に対する解の存在と一意性定理が示される。その定理を非線形シュレディンガー方程式に適用すると上記の主張が得られる。■

【補題】 5.2.

非線形シュレディンガー方程式は以下の保存量（第一積分、エネルギー）を持つ。

$$-\frac{1}{2}\varphi'(x)^2 + \frac{\omega}{2}\varphi(x)^2 - \frac{1}{\alpha+2}|\varphi(x)|^{\alpha+2} = C$$

特に、右辺の定数 C は初期条件のみに依存しており、今回設定した初期条件の下では $C = 0$ となる。

〈証明〉

非線形シュレディンガー方程式は以下の様に変形出来る。

$$0 = -\varphi'' + \omega\varphi - |u|^\alpha u = \frac{d}{dx}\left\{-\frac{1}{2}\varphi'(x)^2 + \frac{\omega}{2}\varphi(x)^2 - \frac{1}{\alpha+2}|\varphi(x)|^{\alpha+2}\right\}$$

両辺を積分すると定理の前半の主張が得られる。また、実際に設定した初期条件を代入することにより、定理の後半の主張が得られる。■

【補題】 **5.3.**

非線形シュレディンガー方程式は定理 5.1 における、後半部の主張のうち「(i) $T_m = \infty$」を成立させる。すなわち、非線形シュレディンガー方程式は一意的な解 $\varphi \in C^2([0,\infty))$ を常に持つ。

〈証明〉

補題 5.2 より、任意の $x \in [0, T_m)$ で

$$-\frac{1}{2}\varphi'(x)^2 + \frac{\omega}{2}\varphi(x)^2 - \frac{1}{\alpha+2}|\varphi(x)|^{\alpha+2} = 0$$

となり、これを整理すると

$$0 \leq \varphi'(x)^2 = \omega\varphi(x)^2 - \frac{2}{\alpha+2}|\varphi(x)|^{\alpha+2}$$

という不等式を得る。最左辺と最右辺に注目すると、$|\varphi|^\alpha \leq \frac{\omega(\alpha+2)}{2}$ となる事から、$|\varphi|$ は有界である。また、不等式の第二辺と最右辺に注目すると、$|\varphi|$ の有界性より φ' も有界である事がわかる。以上の事より、

$$\lim_{t\to\infty}\{|\varphi(x)| + |\varphi'(x)|\} < \infty$$

となるので、定理 5.1 の後半部のうち (ii) が否定される為、非線形シュレディンガー方程式では (i) が成立する。■

【注】 **5.4.**

補題 5.1 や補題 5.3 やこれまで検討してきた解の存在や一意性定理では、考える定義域として正の部分のみに着目してきた。しかしながら、負の領域に関してもほとんど同様の議論を行う事が出来る。すなわち、定義域を符号に関わらず全体で考えると、補題 5.3 は次の様な主張に書き換わる。すなわち、非線形シュレディンガー方程式は一意的な解 $\varphi \in C^2(\infty,\infty))$ を常に持つ。証明は省略する。■

以上が、非線形シュレディンガー方程式に対する、解の存在と一意性に関する議論であった。この結果を用いると解の具体的な形を求めずとも、解の多くの性質を導く事が出来る。その性質とは以下の様なものである。

- φ は偶関数
- φ は $x=0$ で極大
- φ は正の値
- φ は $x>0$ において単調減少 $\Leftrightarrow \varphi' < 0$
- $|x| \to \infty$ の時、$\varphi(x), \varphi'(x) \to 0$

以上で述べられた解の性質を用いると、非線形シュレディンガー方程式自体をより単純な形に整理する事が可能となる。単純な形へと変形された非線形シュレディンガー方程式は具体的に厳密解を求める事が可能である。この様に厳密解が非線形微分方程式で求まる事は稀である。ただし、非線形シュレディンガー方程式厳密解を持つ理由について考えてみると、今回の主題である解の存在と一意性の議論に関連する事は本質的ではなく、むしろ、補題 5.2 で導かれた様な保存量が微分方程式の自由度と同じ数だけ存在する事の方が本質的である。しかしながら、上述の解の性質を理由する事によって、問題が大幅に単純化される為、以下で概観する。

まず、我々が考える非線形シュレディンガー方程式とは以下の微分方程式であった。注 5.4 よりこの微分方程式は $\mathbb{R}$ 上の大域解が一意的に存在する。

$$-\varphi'' + \omega\varphi - |u|^\alpha u = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

ここで先ほどの解の性質「φ は正の値」より左辺第三項の絶対値を外す事ができ、又、「φ は偶関数」であるので $x > 0$ の領域のみに注目しても一般性は失わない。これらを考慮して書き換えると、

$$-\varphi'' + \omega\varphi - |u|^{\alpha+1} = 0, \quad x \geq 0$$

となる。以降、$x \geq 0$ を考える。ここで、補題 5.2 で導いた等式を変形すると、

$$-\frac{1}{2}\varphi'(x)^2 + \frac{\omega}{2}\varphi(x)^2 - \frac{1}{\alpha+2}|\varphi(x)|^{\alpha+2} = 0$$
$$\Leftrightarrow {\varphi'}^2 = \omega\varphi^2\left(1 - \frac{2}{\omega(\alpha+2)}\varphi^\alpha\right)$$

となる。最後に「$\varphi' < 0$」より、左辺の二乗を外す際の右辺の符号に注意すると、

$$\varphi' = -\sqrt{\omega}\varphi\sqrt{1 - \frac{2}{\omega(\alpha+2)}\varphi^\alpha}$$

と変形する事が可能であり、これは、解の存在と一意性定理を利用して解の性質を導出する事によって、二階常微分方程式であった微分方程式が一階の微分方程式へと変形できた事を意味する。この式は実際に変数変換を繰り返す事によって厳密解を導く事が可能であり、その解は

$$\varphi(x) = \left(\frac{\omega(\alpha+2)}{2\cosh^2\left(\frac{\alpha\sqrt{\omega}}{2}x\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

と求まる。